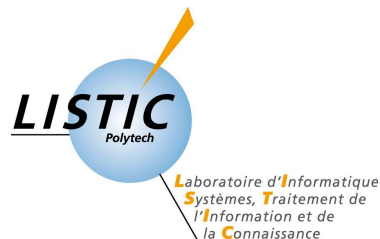




LFA 2010, Lannion, 18 et 19 Novembre 2010

Systemes flous imprécis : règles, arithmétique, ... ?

Sylvie Galichet



Laurent Foulloy
Reda Boukezzoula



Plan

- Introduction
 - *Systemes flous imprécis ?*
- Systemes flous à base de règles
- Systemes flous arithmétiques
- Conclusion / perspectives



Introduction

■ Systèmes flous imprécis ?

■ Approche **systeme**



- Matériel
- Informatique / logiciel
- Humain
- ...
- Modèle, **représentation** du monde réel

■ Le formalisme de représentation exploite la théorie des **sous-ensembles flous**



Introduction

■ Systèmes flous imprécis ?

La représentation repose sur une connaissance imparfaite du système réel (système mal connu) ou trop complexe pour être manipulée directement.

■ Connaissances / informations

■ Expertise

- Codage

■ Données collectées

- Apprentissage, Fouille de données
- Identification

■ Equations mathématiques

- Approximation
- Transformation



Introduction

■ Systèmes flous imprécis ?



- La relation entrées / sorties est décrite imprécisément (relation floue).
- En présence d'entrées précises, des sorties imprécises (sous-ensembles flous) sont générés.
- En présence d'entrées imprécises, l'imprécision des sorties produites a une double origine (propagation d'incertitudes, méconnaissance du système) → CAS NON ABORDE



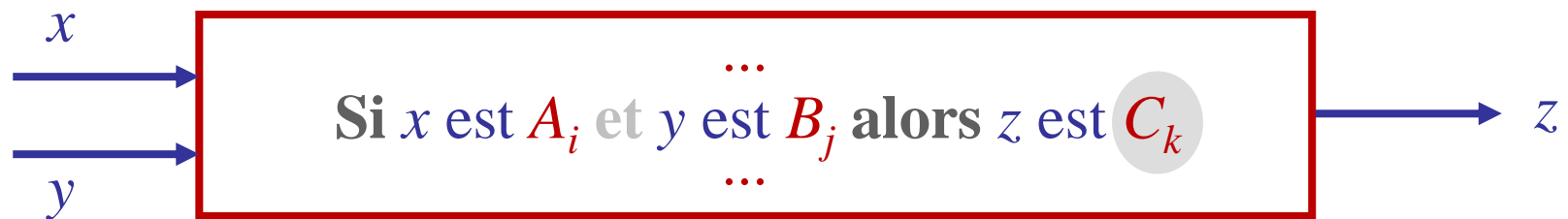
Plan

- Introduction
- Systèmes flous à base de règles
 - Approches Mamdani et Sugeno
 - Règles conjonctives / Règles graduelles
- Systèmes flous arithmétiques
- Conclusion / perspectives



Approches Mamdani et Sugeno

- Deux grandes familles
 - Systèmes de Mamdani



- Systèmes de Takagi-Sugeno-Kang





Approches Mamdani et Sugeno

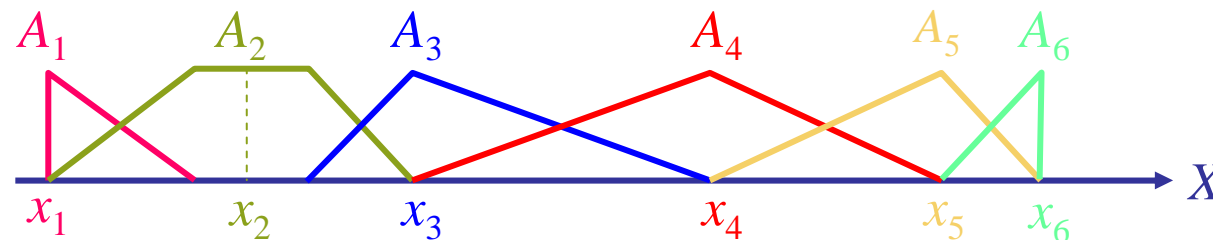
- D'un point de vue applicatif, l'utilisation de ces systèmes est restreinte à des **entrées précises**.
- Sous l'hypothèse d'un partitionnement strict des univers de discours d'entrée, ces systèmes sont **décomposables** en sous-systèmes élémentaires.
- Chaque sous-système est défini sur un hyper-rectangle délimité par des entrées modales.
- L'hypothèse d'une partition stricte des univers de discours d'entrée garantit le « **non-recouvrement** » des domaines de définition des sous-systèmes.
- Pour un vecteur quelconque d'**entrées précises**, l'analyse du système flou global peut être restreinte à celle de l'unique sous-système activé.



Approches Mamdani et Sugeno

■ Décomposition des univers de discours

- Une famille $\{A_i\}_{i=1, \dots, nx}$ de nx symboles engendre une partition stricte de X si et seulement si $\forall x \in X, \sum_{i=1}^{nx} \mu_{A_i}(x) = 1$
- Toute entrée précise x^* de X est décrite par au plus 2 symboles
- x est une valeur modale de A_i si et seulement si $\mu_{A_i}(x) = 1$
- L'univers de discours X est décomposé en $nx - 1$ intervalles dont les bornes sont les valeurs modales des symboles



$$\begin{aligned} X &= [x_1, x_6] = [x_1, x_2] \cup [x_2, x_3] \cup [x_3, x_4] \cup [x_4, x_5] \cup [x_5, x_6] \\ &= I_x^1 \cup I_x^2 \cup I_x^3 \cup I_x^4 \cup I_x^5 = \bigcup_{i=1}^{nx-1} I_x^i \end{aligned}$$



Approches Mamdani et Sugeno

■ Décomposition des systèmes

- Les univers de discours X_j des n variables d'entrée x_j sont décomposés en intervalles.

$$X_j = \bigcup_{i=1}^{nx_j-1} I_{x_j}^i \quad j = 1, \dots, n$$

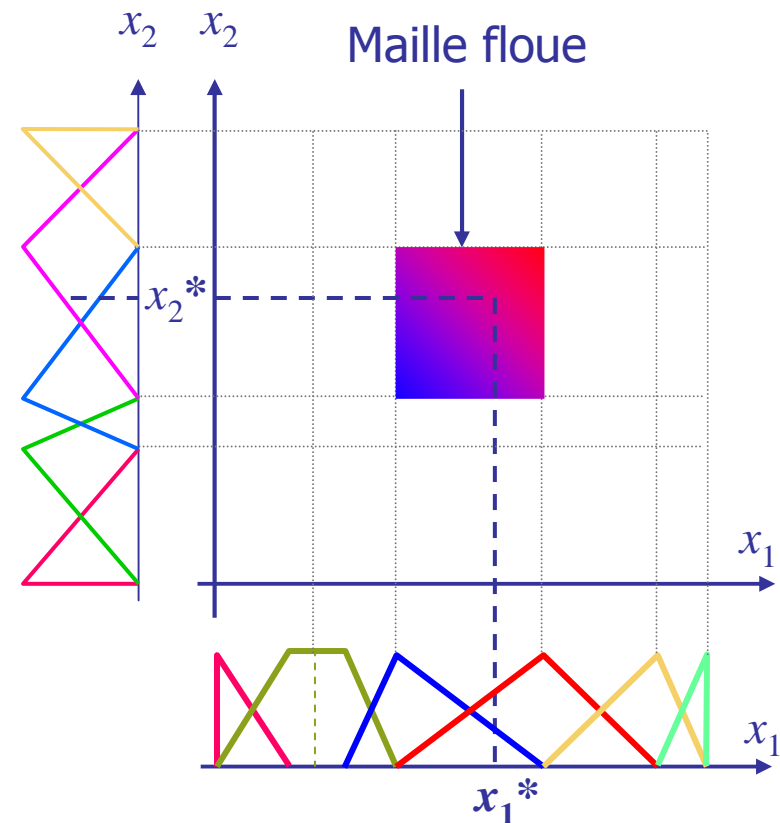
- Chaque hyper-rectangle défini par le produit cartésien

$$\prod_{j=1}^n I_{x_j}^{i_j} \quad i_j = 1, \dots, nx_j$$

constitue une maille floue, domaine de définition d'un sous-système.

- Le système est composé de S sous-systèmes

$$S = \prod_{j=1}^n (nx_j - 1).$$



6 symboles pour x_1

5 symboles pour x_2

5 x 4 = 20 sous-systèmes

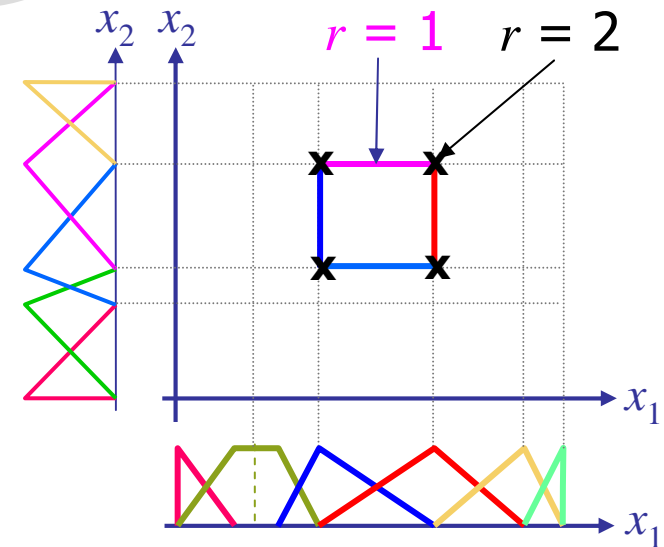


Approches Mamdani et Sugeno

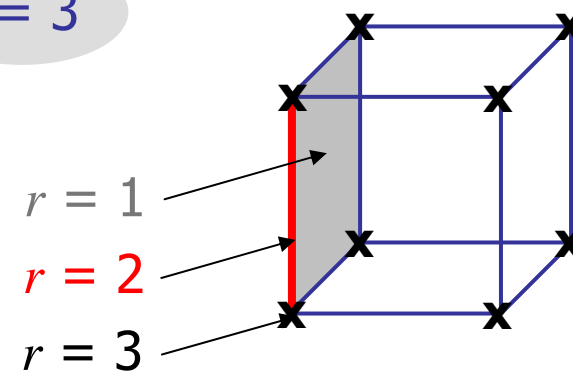
■ Sous-système élémentaire

- Chacune des n entrées étant décrite par 2 symboles, un sous-système élémentaire est défini par 2^n règles.
- Pour un vecteur d'entrées modales (sommet de l'hyper-rectangle), une seule règle est activée. La sortie inférée par le sous-système correspond à la conclusion de cette règle.
- Pour un vecteur d'entrées dont uniquement r composantes parmi les n sont modales, 2^{n-r} règles sont activées simultanément. Ces règles sont partagées par 2^r sous-systèmes qui possèdent donc des domaines de définition se recouvrant (hyperplan de \mathfrak{R}^{n-r+1}).

$n = 2$



$n = 3$

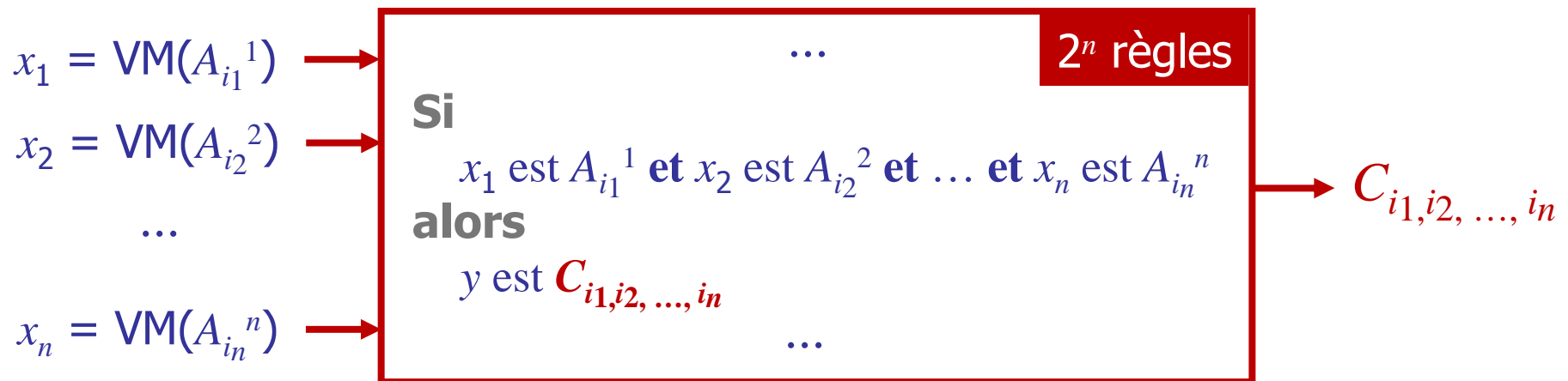




Approches Mamdani et Sugeno

- Sous-système élémentaire : entrées modales
 - Une seule règle activée
 - Sortie inférée = conclusion de la règle activée

Sous-système de type Mamdani

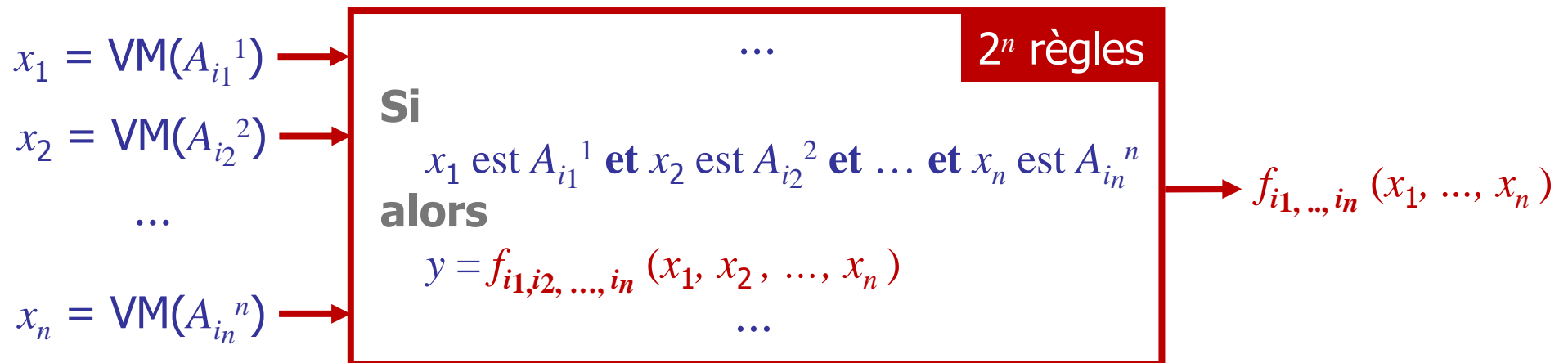




Approches Mamdani et Sugeno

- Sous-système élémentaire : entrées modales
 - Une seule règle activée
 - Sortie inférée = conclusion de la règle activée

Sous-système de type Sugeno





Approches Mamdani et Sugeno

- **Pour les systèmes de type Sugeno**
 - Un sous-système, composé de 2^n règles, est directement associé à une collection de 2^n points de \mathfrak{R}^{n+1} .
- **Pour les systèmes de type Mamdani**
 - La sortie générée pour les 2^n sommets de l'hyper-rectangle de définition d'un sous-système est un sous-ensemble flou défini sur l'univers de discours numérique de la sortie.
 - Sa transformation est réalisée par un mécanisme de **défuzzification**.
 - Après défuzzification, un sous-système est associé à une collection de 2^n points de \mathfrak{R}^{n+1} .
- **Dans les deux cas**, un sous-système est caractérisé par une collection de 2^n points de \mathfrak{R}^{n+1} . Entre ces points, une **interpolation numérique** est réalisée.

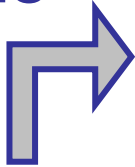


Approches Mamdani et Sugeno

- Interpolation : systèmes à conclusion numérique constante

Si x_1 est $A_{i_1}^1$ et x_2 est $A_{i_2}^2$ et ... et x_n est $A_{i_n}^n$ alors $y = C_{i_1, i_2, \dots, i_n}$

Sugeno



$$y = C_{i_1, i_2, \dots, i_n}$$

$y = f_{i_1, i_2, \dots, i_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$
avec f_{i_1, i_2, \dots, i_n} polynôme d'ordre 0

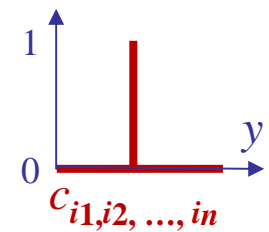


Mamdani

y est C_{i_1, i_2, \dots, i_n}
avec C_{i_1, i_2, \dots, i_n} sous-ensemble flou dégénéré

t-norme : produit

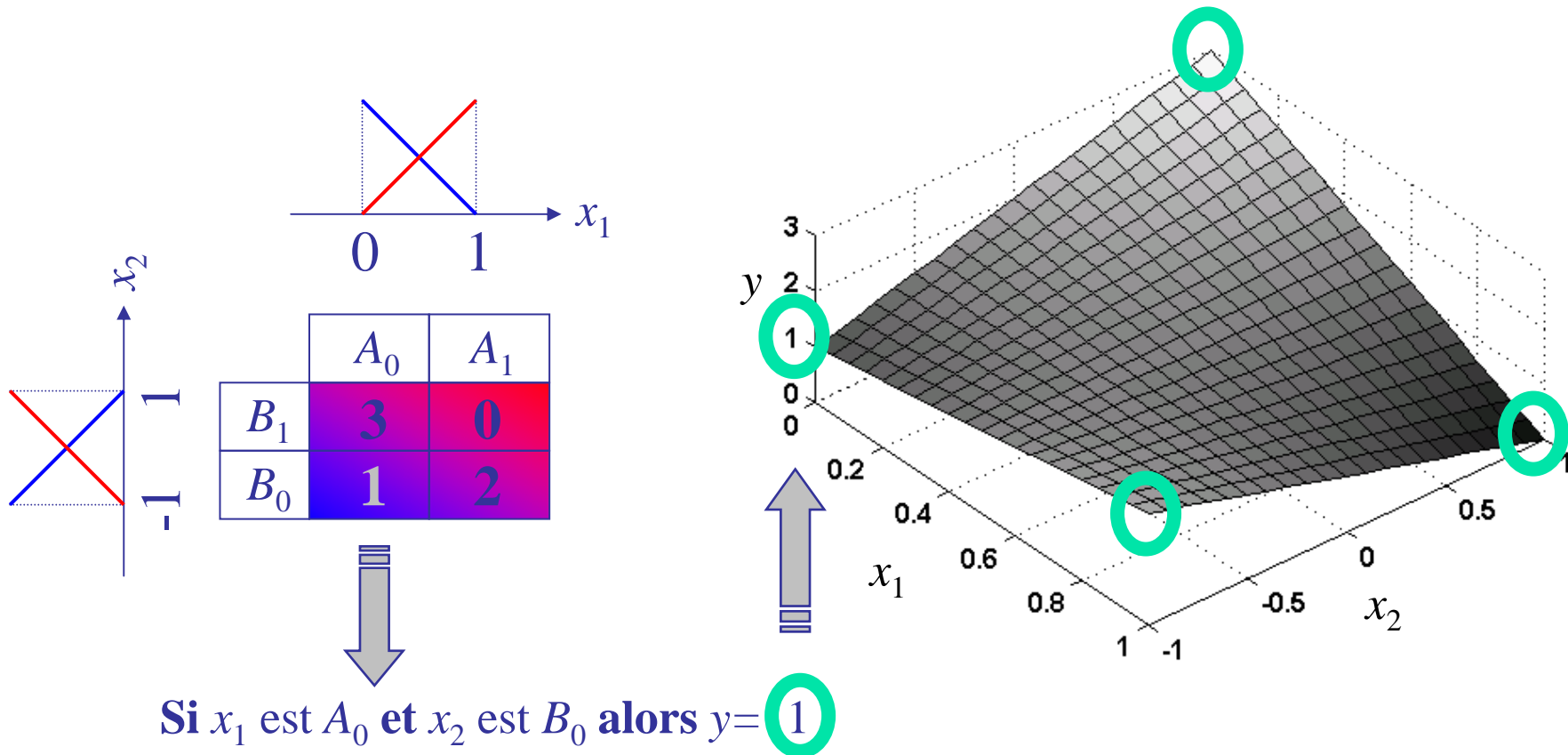
t-conorme : somme bornée à 1





Approches Mamdani et Sugeno

- Interpolation : systèmes à conclusion numérique constante, implémentation à la Sugeno

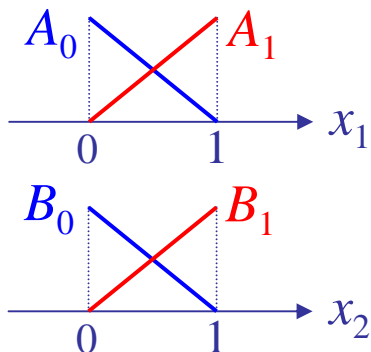




Approches Mamdani et Sugeno

- Une **interpolation linéaire** ne peut être obtenue que si les 2^n points d'interpolation le permettent, c'est-à-dire appartiennent à un hyperplan de \mathfrak{R}^{n+1} .
- Cette condition de linéarité impose l'utilisation de **règles additives**.
 - Sugeno
Si x_1 est A_i et x_2 est B_j alors $y = VM(A_i) + VM(B_j)$
 - Mamdani
Si x_1 est A_i et x_2 est B_j alors y est C_{i+j} avec $VM(C_{i+j}) = VM(A_i) + VM(B_j)$

$$y = x_1 + x_2$$

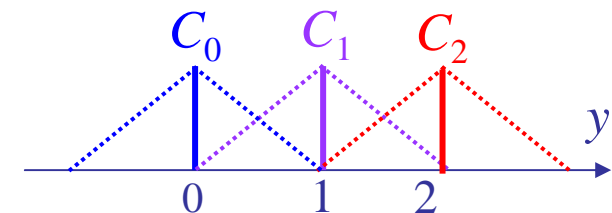


	A_0	A_1
B_1	1	2
B_0	0	1

Sugeno

	A_0	A_1
B_1	C_1	C_2
B_0	C_0	C_1

Mamdani





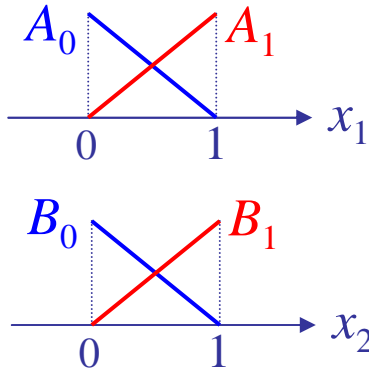
Approches Mamdani et Sugeno

- Un système de Sugeno à conclusion constante est un système multi-linéaire par morceaux.
- Il peut s'exprimer analytiquement sous une forme linéaire en les paramètres que sont les conclusions de règles.
- Pour les systèmes de Mamdani, de nombreuses précautions sont nécessaires pour garantir la linéarité (choix des t-normes et t-conormes, partition de sortie, méthode de défuzzification).
- Dans les systèmes de Mamdani conventionnels (min / max, centre de gravité), des non-linéarités non contrôlables apparaissent.

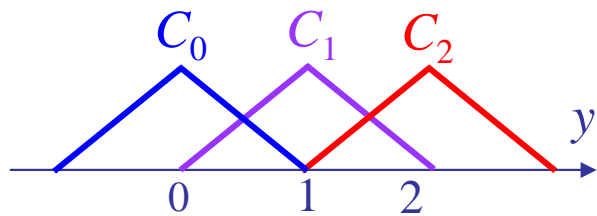


Approches Mamdani et Sugeno

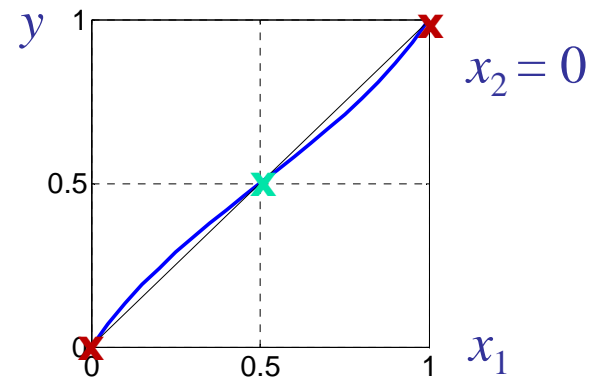
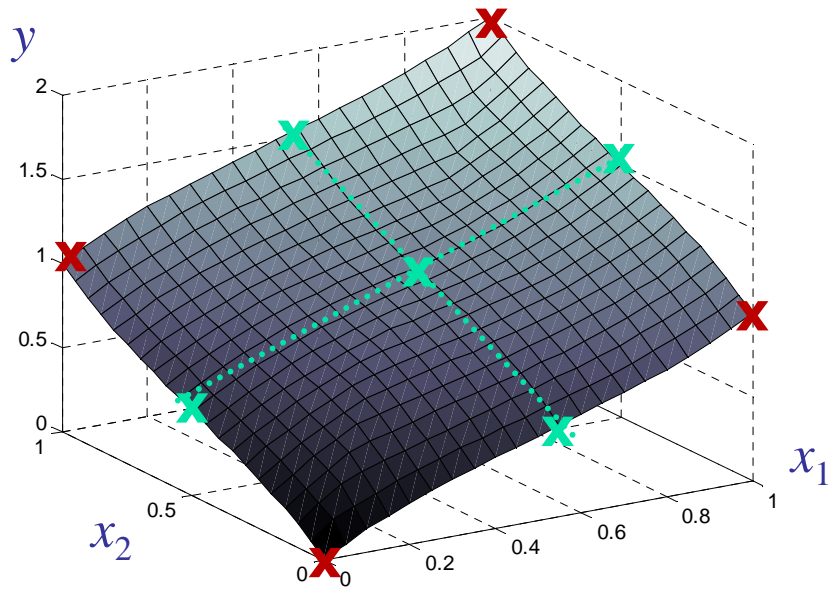
$y = x_1 + x_2$



	A_0	A_1
B_1	C_1	C_2
B_0	C_0	C_1



min / max, centre de gravité





Approches Mamdani et Sugeno

- Les systèmes de Mamdani et Sugeno conventionnels ne sont **pas imprécis**
 - Dans les systèmes de Sugeno, les points d'interpolation et l'interpolation réalisée sont en fait précis
 - systèmes multi-linéaires par morceaux
 - Dans les systèmes de Mamdani, c'est l'étape de défuzzification qui élimine l'imprécision
 - précision numérique difficile à obtenir sans augmenter trop le nombre de règles
 - linéarités indésirables
 - avant défuzzification, l'imprécision obtenue est difficilement interprétable (sous-ensemble flou non normalisé)



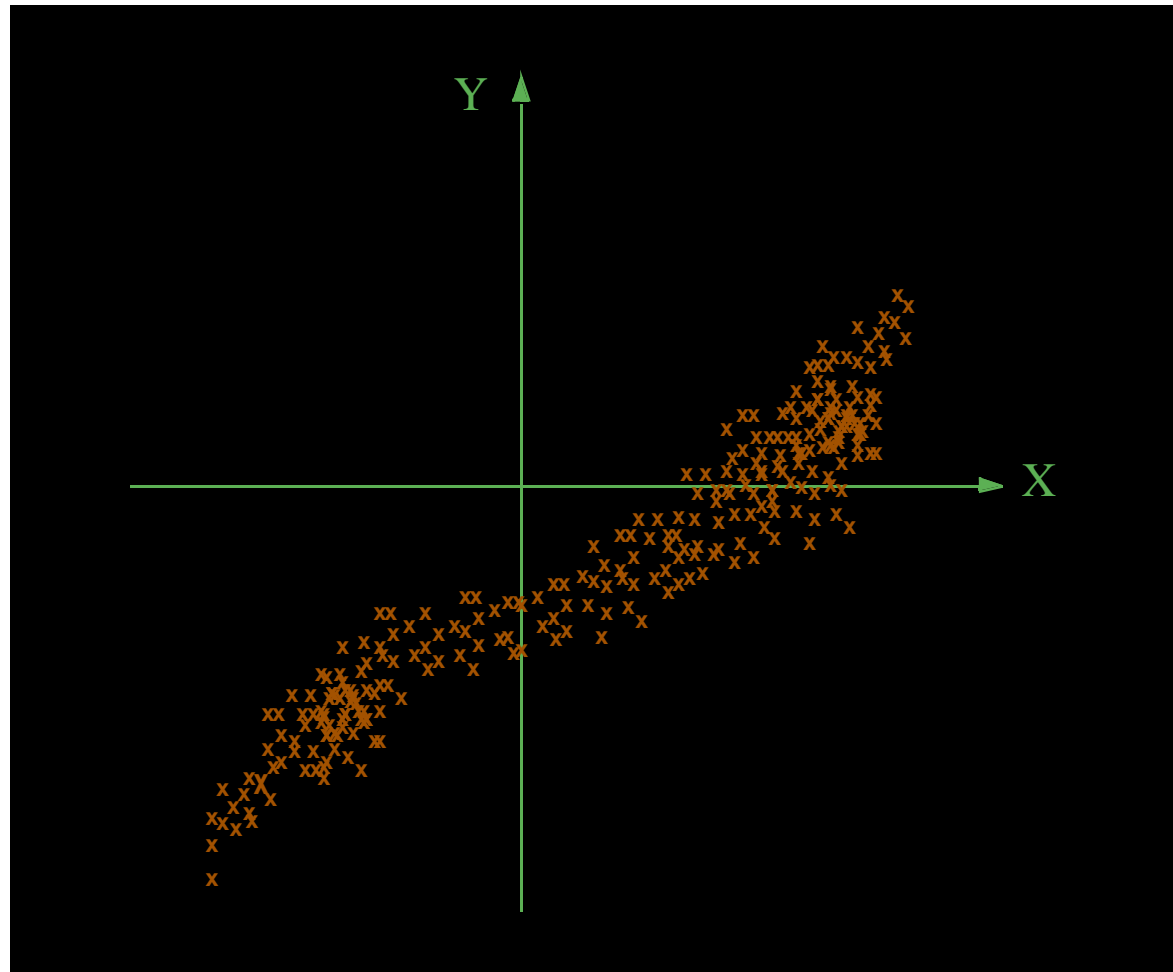
Plan

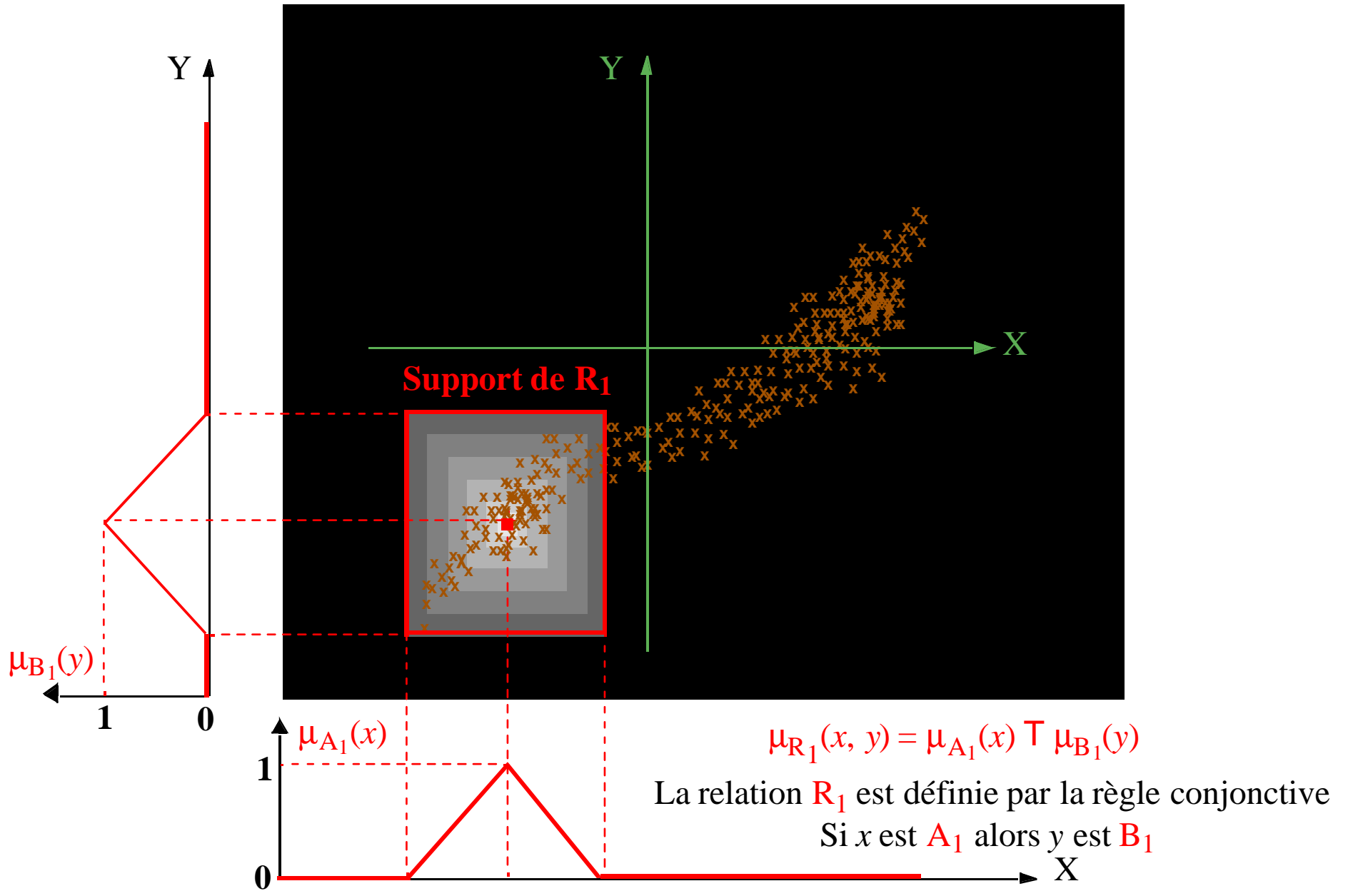
- Introduction
- Systèmes flous à base de règles
 - Approches Mamdani et Sugeno
 - Règles conjonctives / Règles graduelles
- Systèmes flous arithmétiques
- Conclusion / perspectives

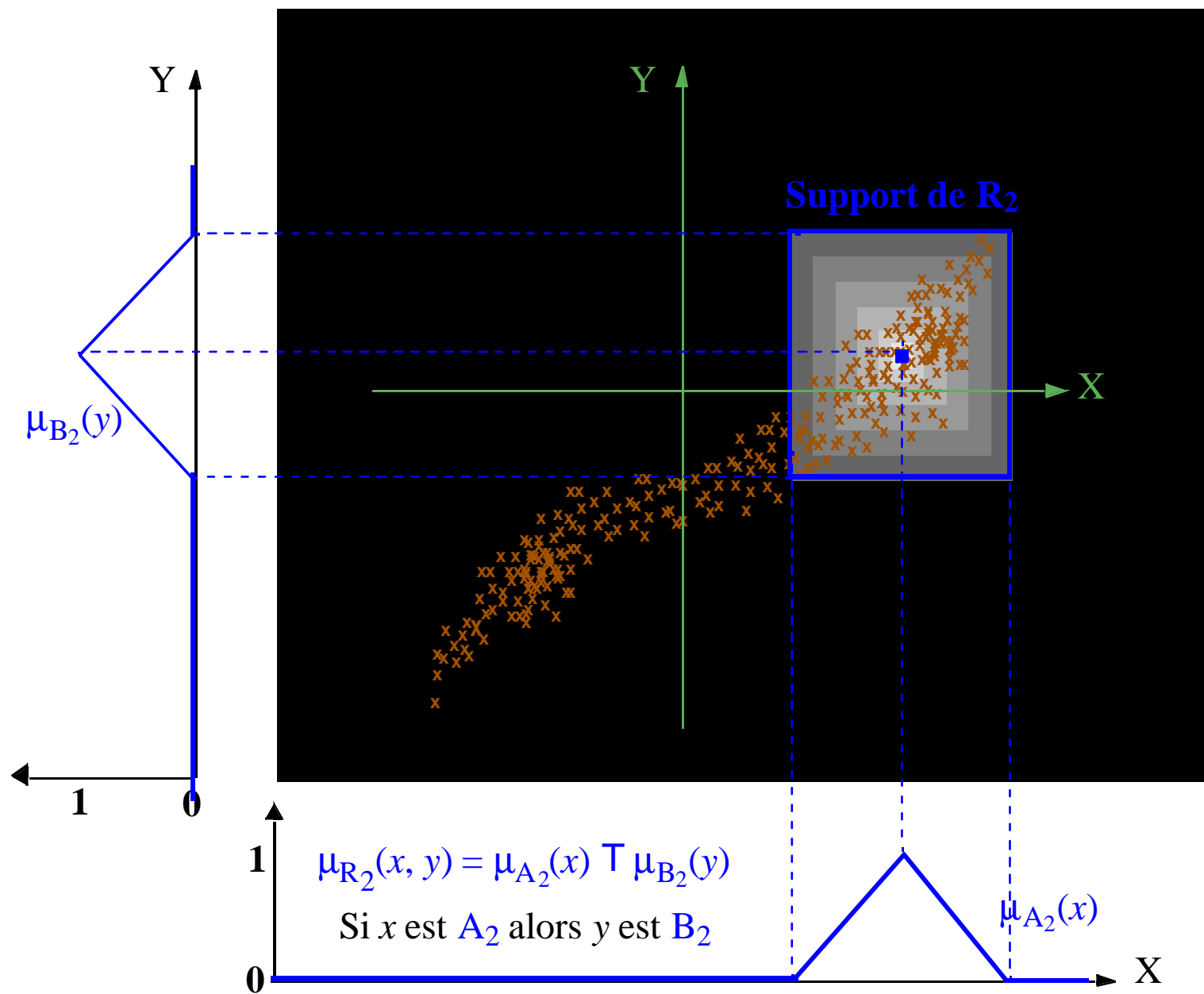


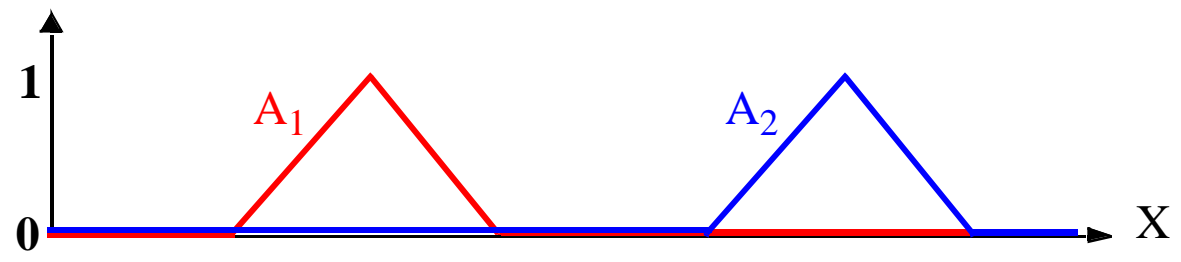
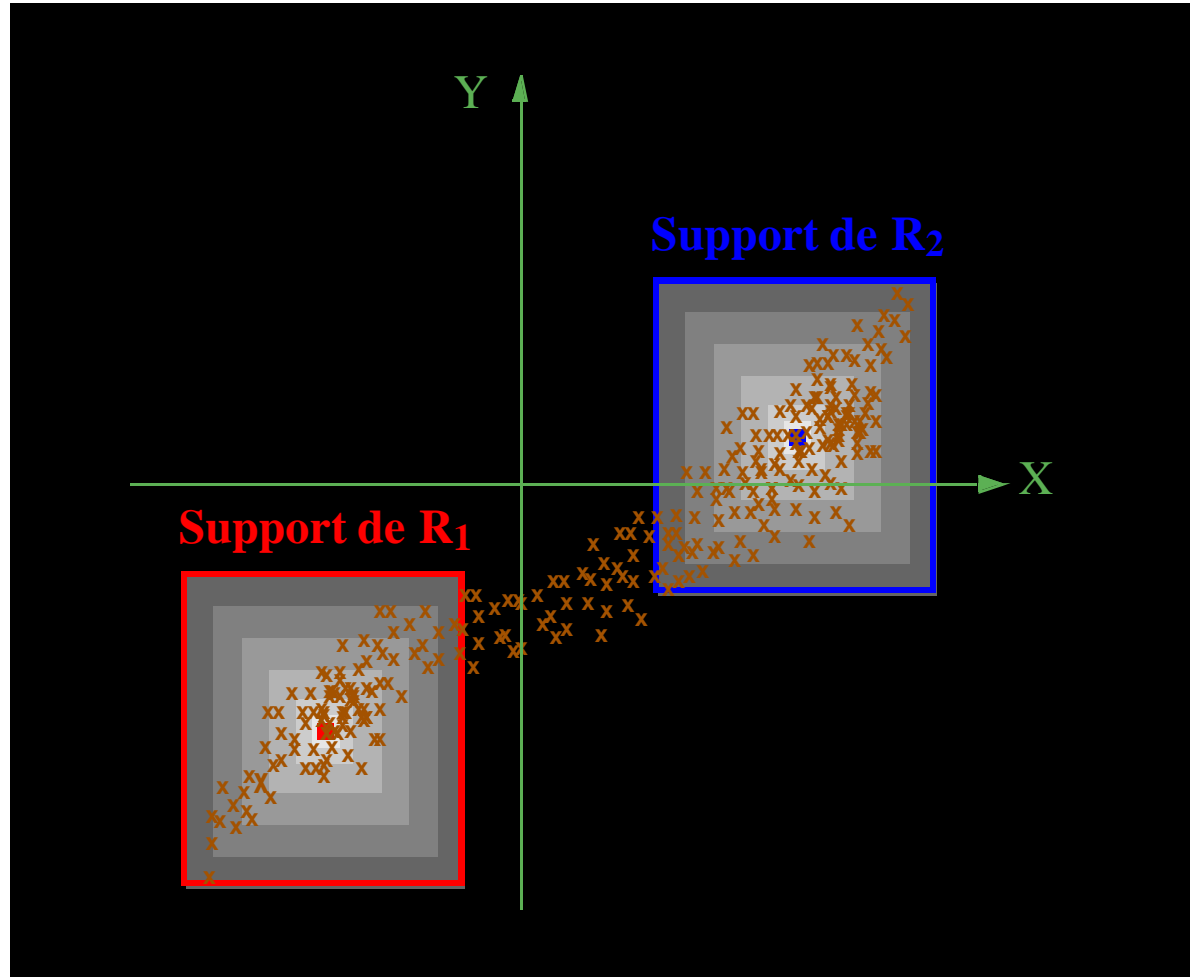
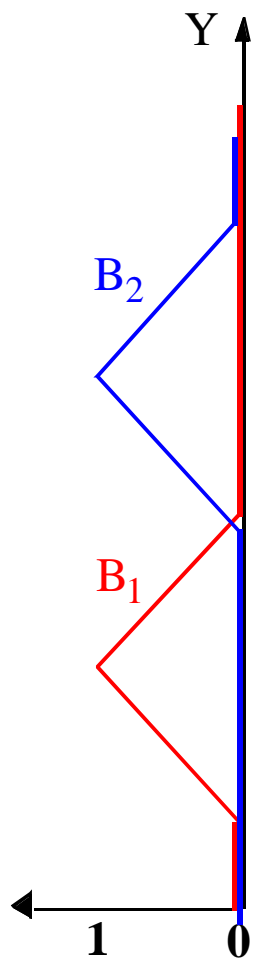
Règles conjonctives

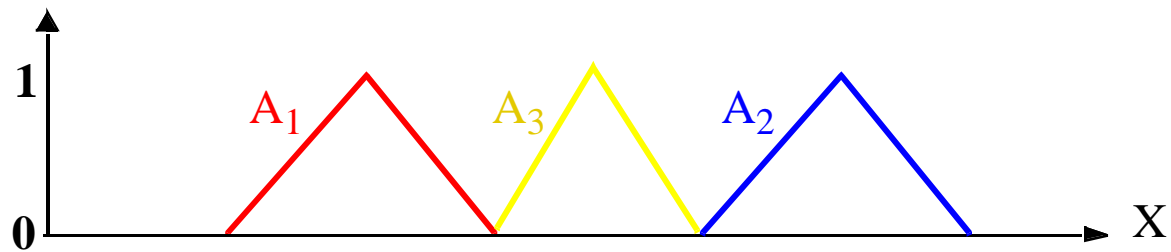
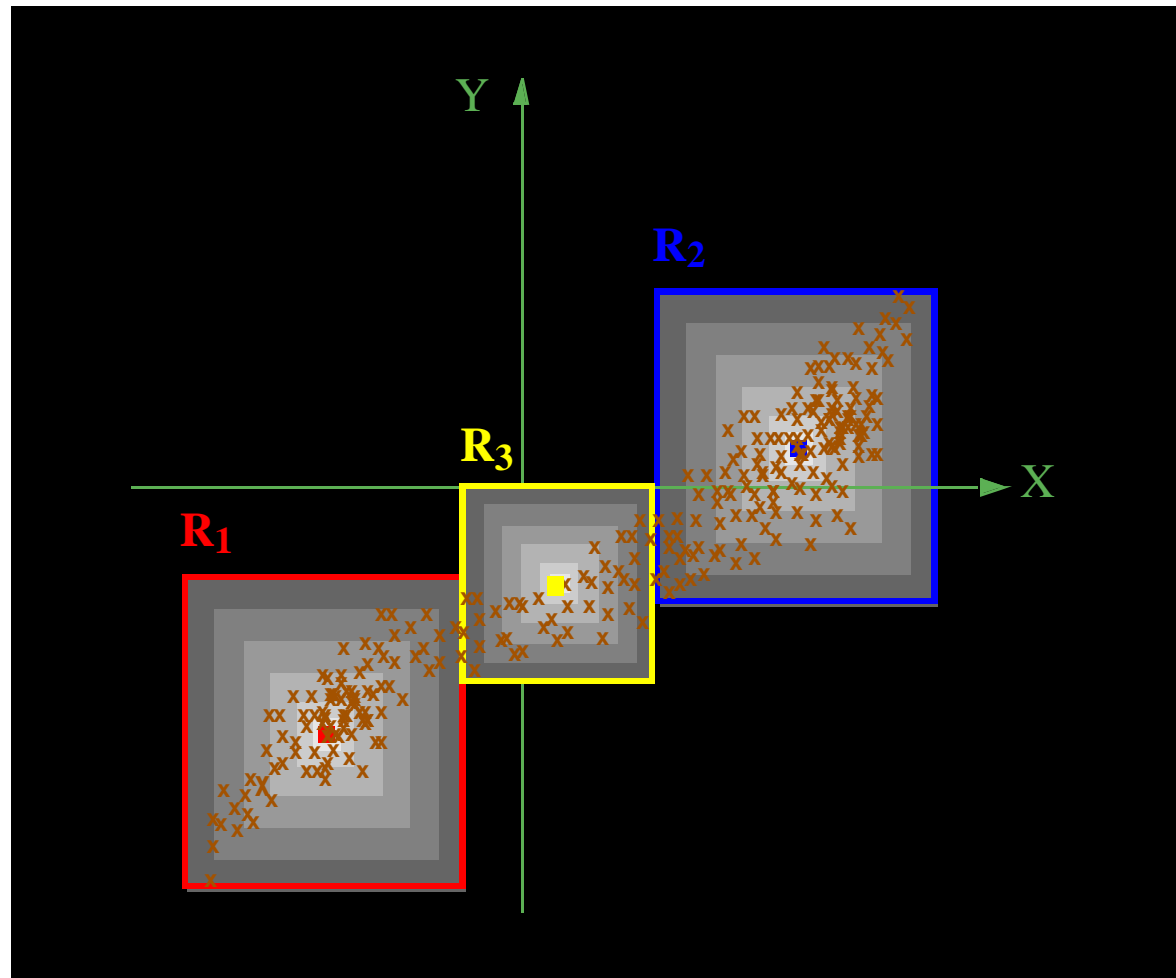
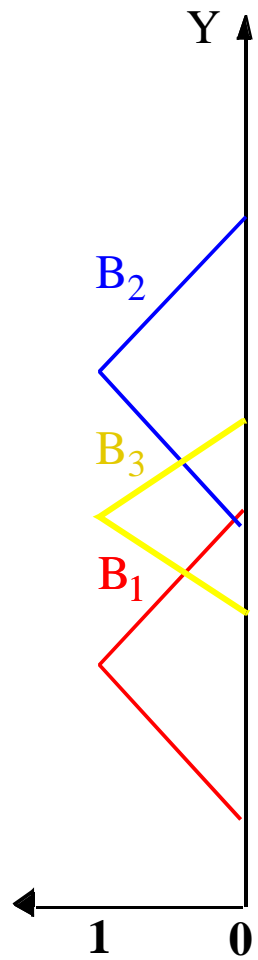
Ensemble d'exemples (une entrée / une sortie)

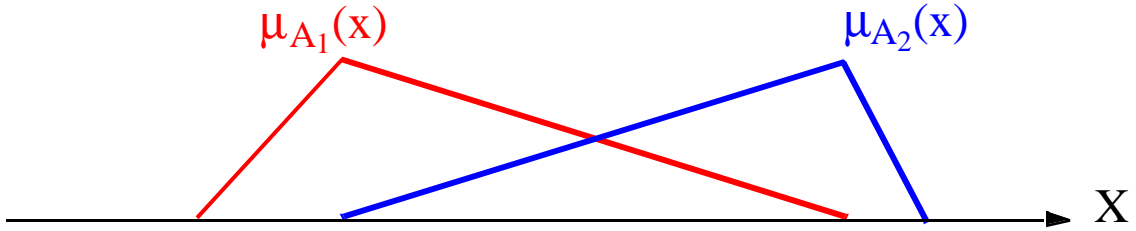
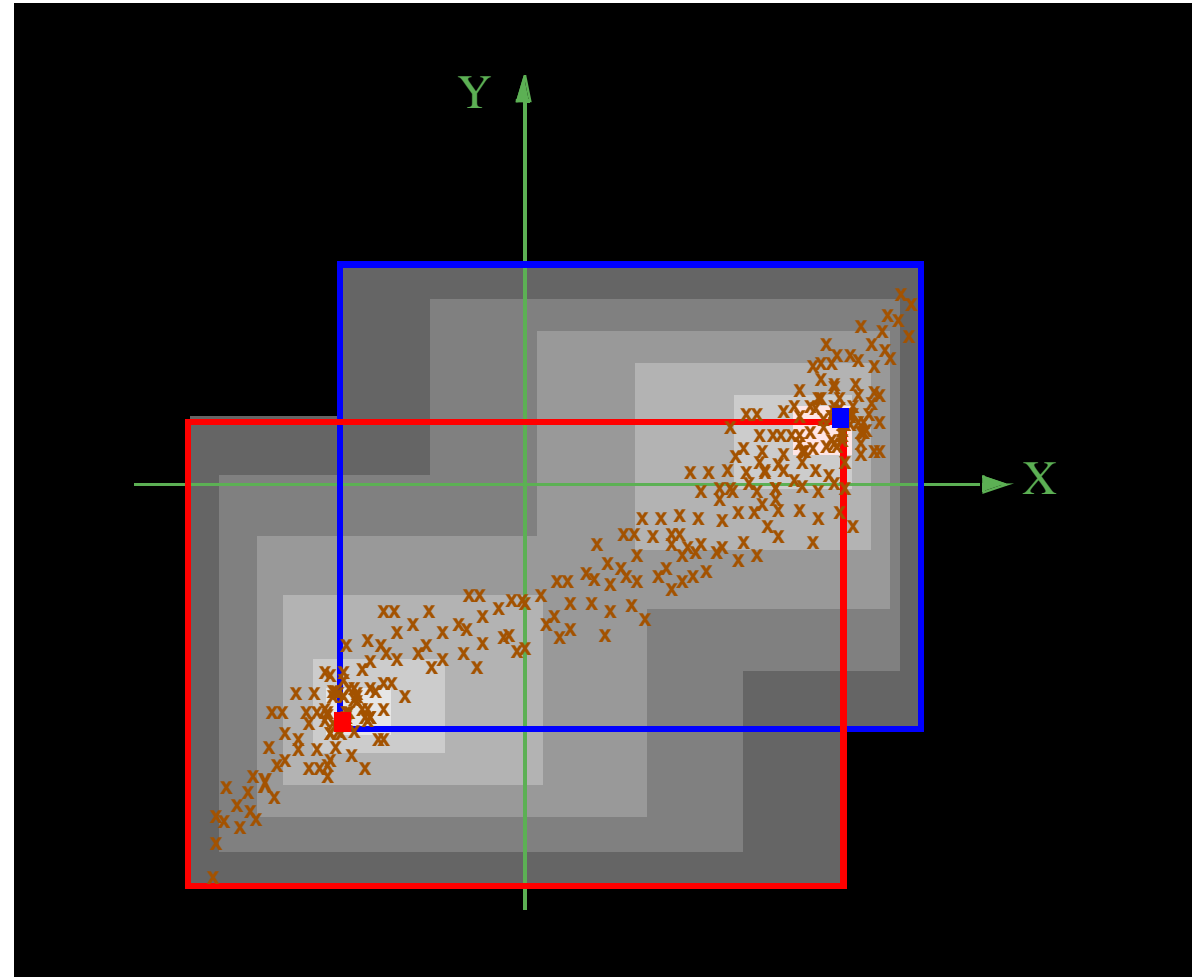
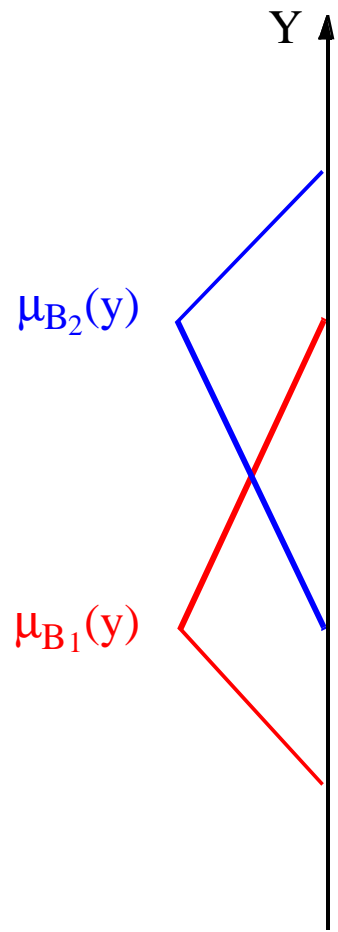


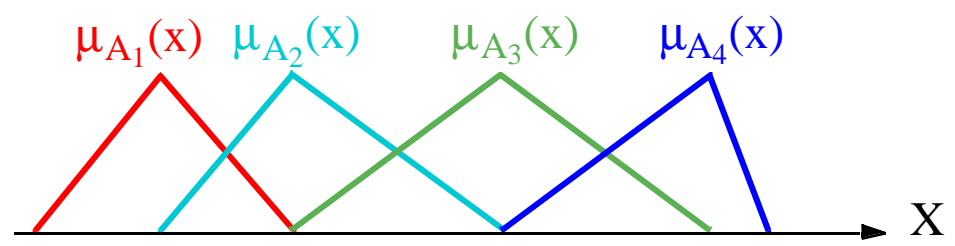
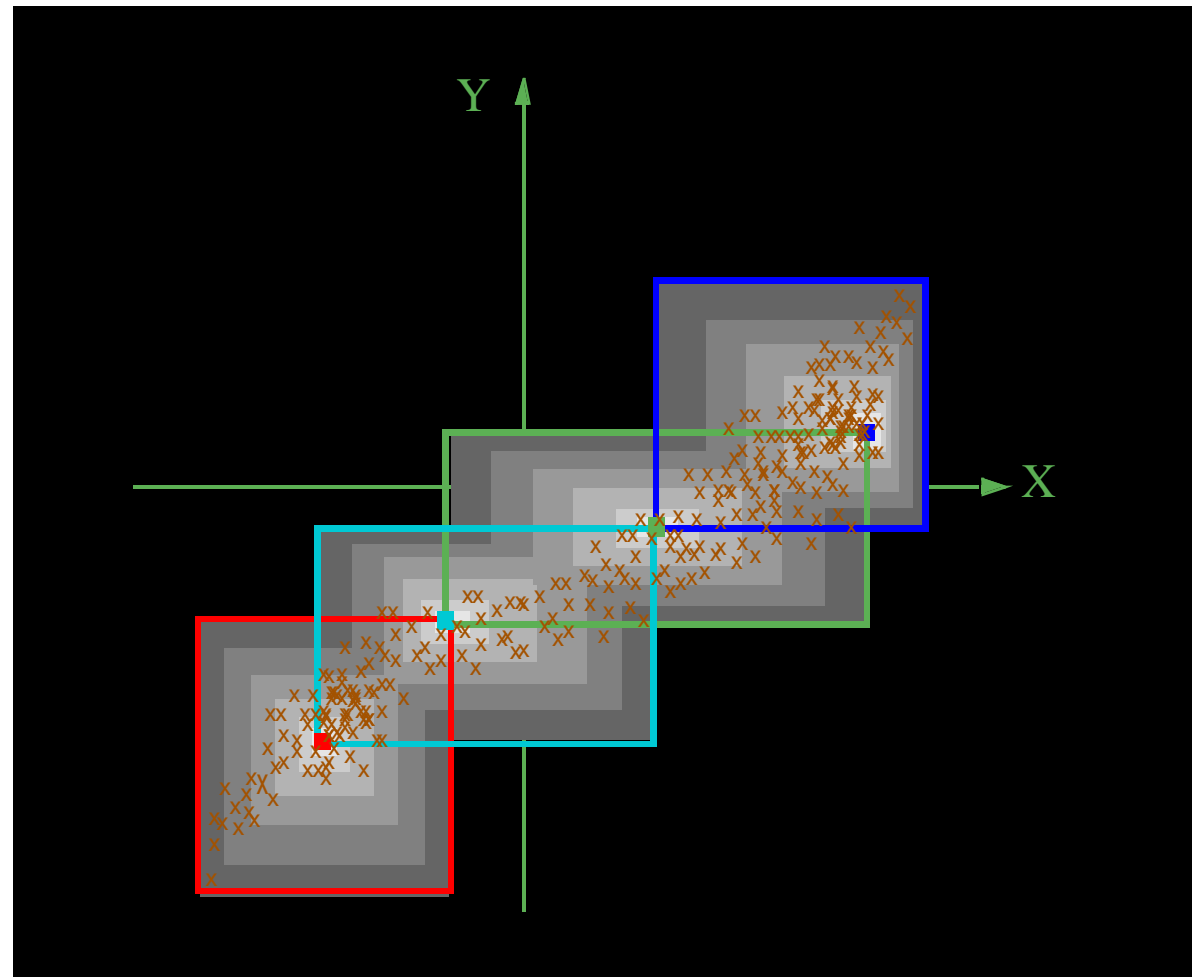
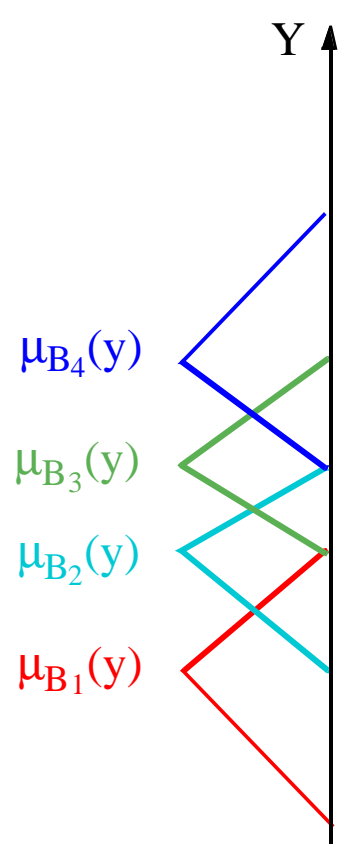














Représentation conjonctive

Le **si ... alors** est représenté par une conjonction (t-norme \top)

$$\mu_{R_i}(x, y) = \mu_{A_i}(x) \top \mu_{B_i}(y)$$

L'agrégation des règles est réalisée par une disjonction (t-conorme \perp)

$$\mu_R(x, y) = \mu_{R_1}(x, y) \perp \mu_{R_2}(x, y) \perp \dots \perp \mu_{R_n}(x, y)$$

L'ajout d'une nouvelle règle « élargit » le support de la relation globale

$$\text{Support}(R) = \{(x, y) \mid \mu_R(x, y) > 0\}$$

Condition initiale avant création de la première règle

$$\text{Support}(R) = \emptyset$$

$$\forall x, y \quad \mu_R(x, y) = 0$$



Représentation implicative

Le **si ... alors** est représenté par une implication résiduelle (\rightarrow)

$$\mu_{R_i}(x, y) = \mu_{A_i}(x) \rightarrow \mu_{B_i}(y)$$

L'agrégation des règles est réalisée par une conjonction (t-norme \top)

$$\mu_R(x, y) = \mu_{R_1}(x, y) \top \mu_{R_2}(x, y) \top \dots \top \mu_{R_n}(x, y)$$

L'ajout d'une nouvelle règle « rétrécit » le noyau de la relation globale

$$\text{Noyau}(R) = \{(x, y) \mid \mu_R(x, y) = 1\}$$

Condition initiale avant création de la première règle

$$\text{Noyau}(R) = \text{Domaine}$$

$$\forall x, y \quad \mu_R(x, y) = 1$$



LFA 2010

Représentation implicative

Dominance du faux

$$0 \rightarrow b = 1$$

Condition limite

$$a \rightarrow b = 1 \text{ ssi } a \leq b$$

Suivant l'implication

$$a \rightarrow b = 0 \text{ si } a > b$$

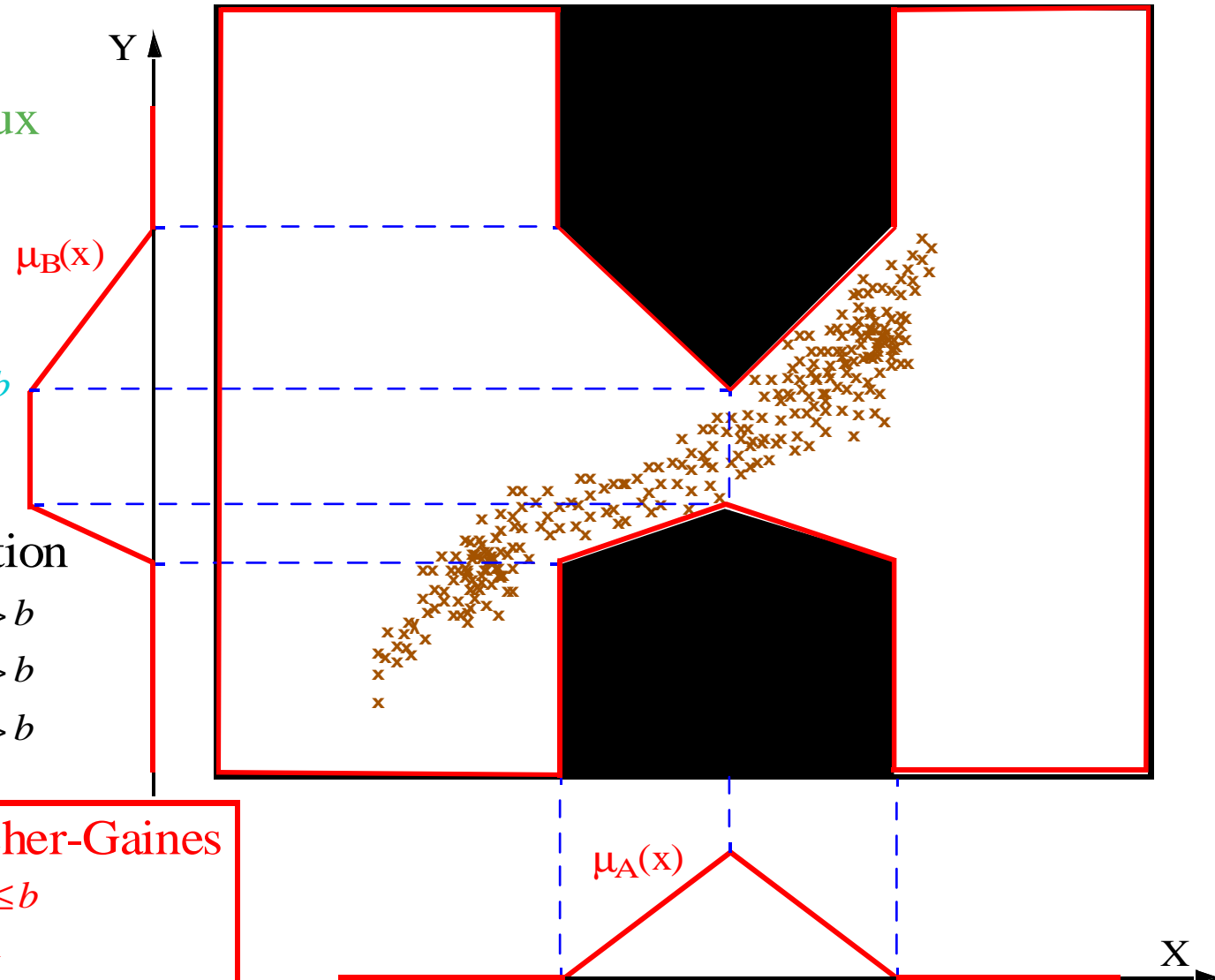
$$a \rightarrow b = b \text{ si } a > b$$

$$a \rightarrow b = b/a \text{ si } a > b$$

Implication Rescher-Gaines

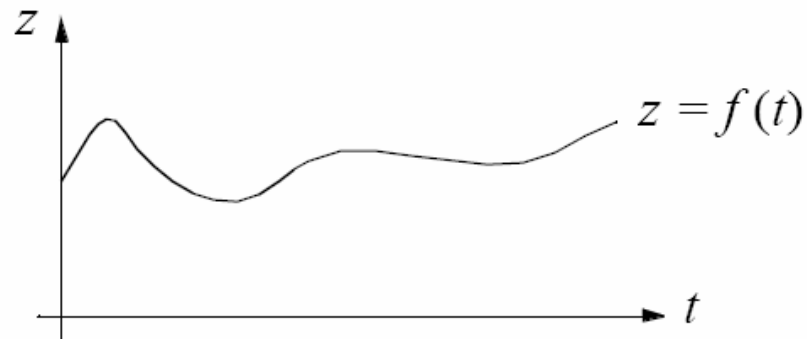
$$a \rightarrow b = 1 \text{ si } a \leq b$$

$$a \rightarrow b = 0 \text{ sinon}$$

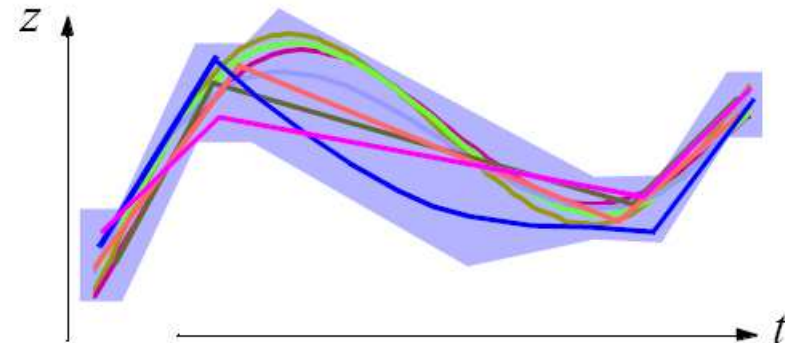




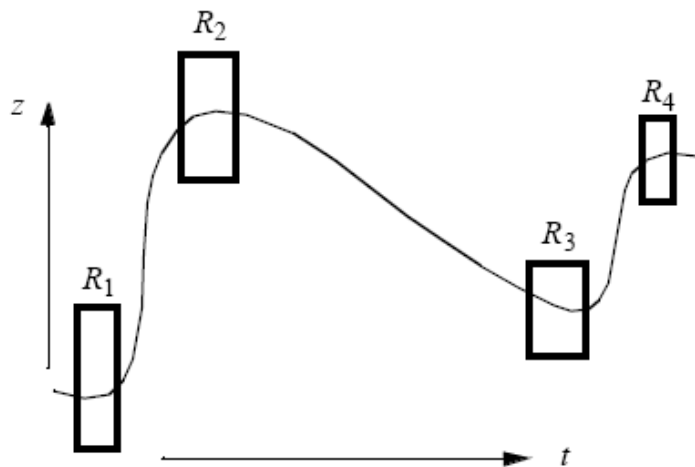
Interpolation et règles graduelles



Représentation précise



Représentation imprécise



Raisonnement interpolatif

- Ensemble restreint de points de référence
- Le modèle interpolatif doit passer par ces points de référence
- Les contraintes sur la forme de l'interpolateur sont relâchées
- Le modèle interpolatif est spécifié à l'aide de règles graduelles



Interpolation et règles graduelles

Points de référence précis : P_i de coordonnées (t_i, z_i) , $i = 1, \dots, n$

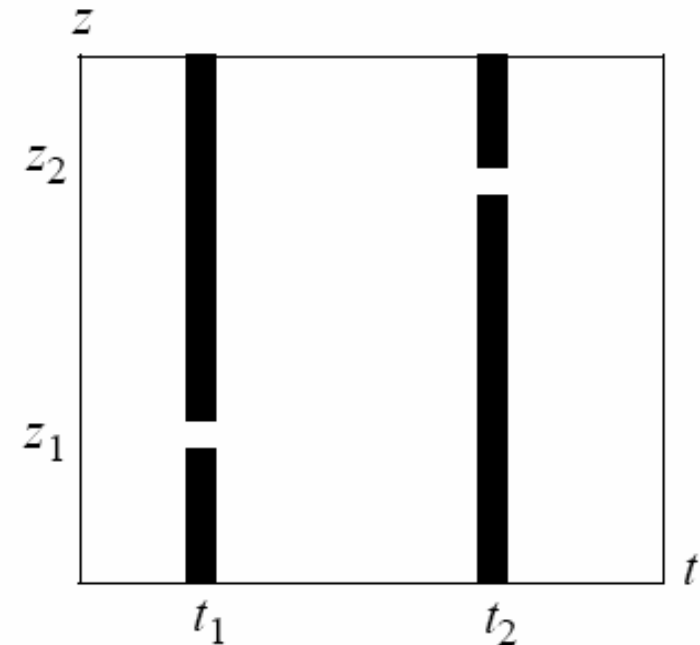
Contraintes naturelles sur Γ

Pour chaque point de référence i

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma(t_i, z_i) = 1 \\ \forall z \neq z_i \in Z, \Gamma(t_i, z) = 0 \\ \forall t \neq t_i \in X, \forall z \in Z, \Gamma(t, z) = 0 \end{array} \right.$$

$$(t = t_i) \rightarrow (z = z_i)$$

“Si $t = t_i$ alors $z = z_i$ ”



$$\Gamma(t, z) = \bigwedge_{i=1, \dots, n} (t = t_i) \rightarrow (z = z_i)$$



Interpolation et règles graduelles

Contraintes de proximité

“Plus t est proche de t_i , plus z est proche de z_i ”

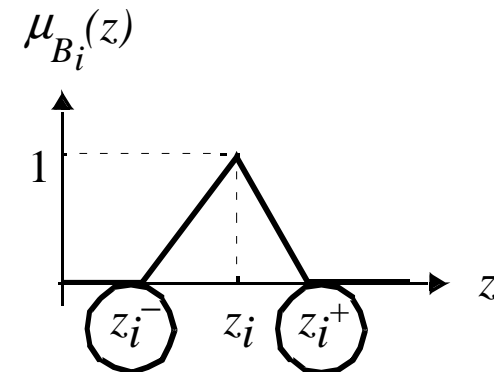
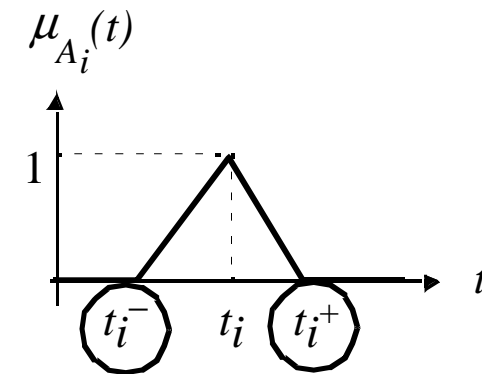
$$\Gamma(t, z) = \min_{i=1, \dots, n} \mu_{\text{proche de } t_i}(t) \rightarrow \mu_{\text{proche de } z_i}(z).$$

➡ Paramétrisation

“Si t est proche de t_i alors z est proche de z_i ”

A_i

B_i



4n paramètres à déterminer pour n points de référence



Interpolation et règles graduelles

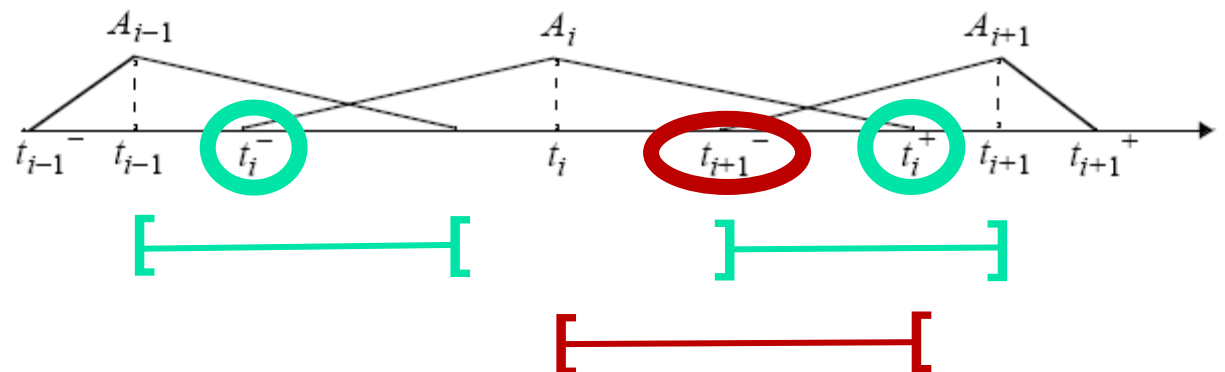
Contraintes sur la partition d'entrée

Aucune entrée t n'est sujette à plus de deux contraintes

$$\longrightarrow t_{i-1} \leq t_i^- \text{ et } t_i^+ \leq t_{i+1}, i = 2, \dots, n-1$$

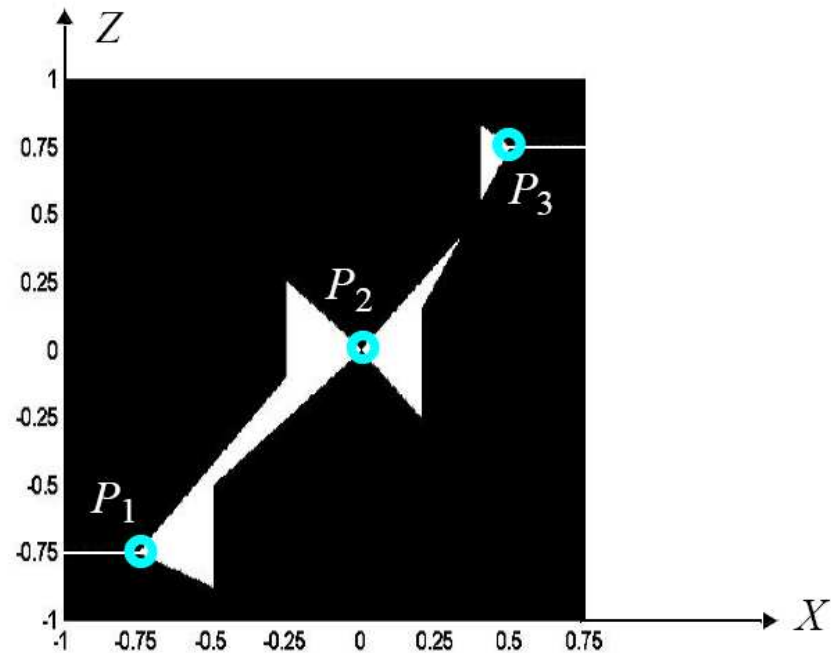
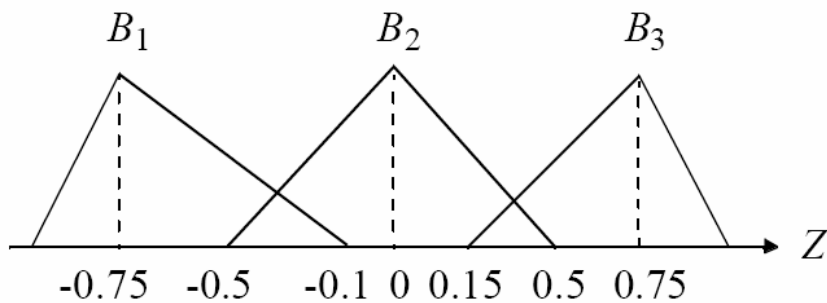
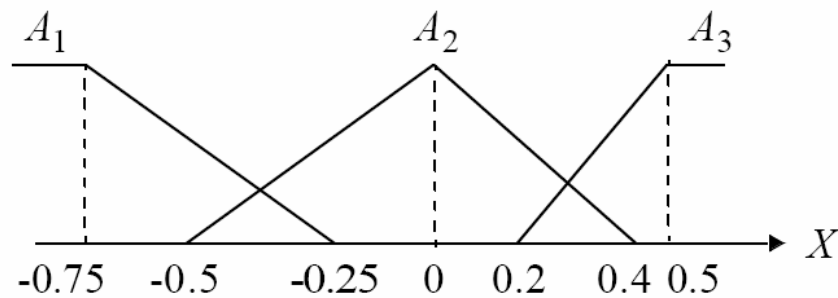
Toute entrée t est sujette à au moins une contrainte

$$\longrightarrow t_{i+1}^- < t_i^+, i = 1, \dots, n-1$$





Interpolation et règles graduelles



$A_2 \rightarrow B_2$
 $A_3 \rightarrow B_3$

Règles incohérentes



Interpolation et règles graduelles

- Restriction du nombre de contraintes actives (conditions sur partition d'entrée)
- Garantie de la cohérence des règles
- Graphe d'interpolation de surface minimale

$2(n-1)$ équations

$4n$ paramètres

Choix de la partition d'entrée ($2n$ paramètres)

Choix du domaine de définition de sortie (b_1^-, b_1^+)



Résolution système d'équations pour les derniers paramètres



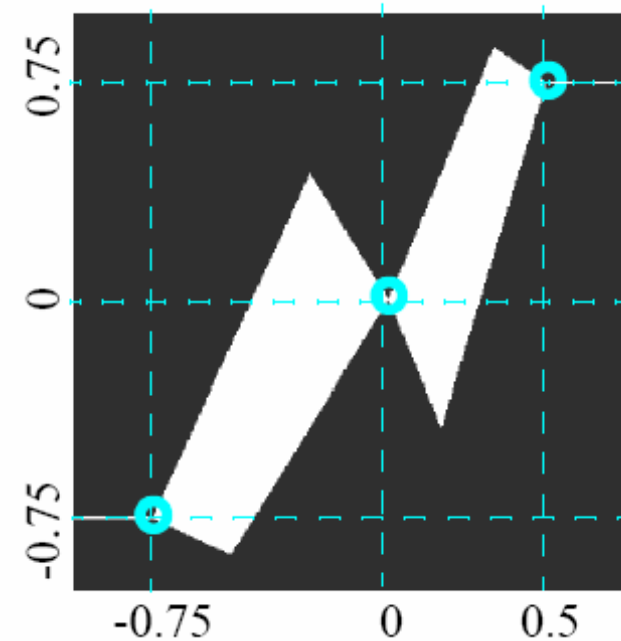
Interpolation et règles graduelles

	x_i^-	x_i	x_i^+
A_1		-0.75	-0.25
A_2	-0.5	0	0.3333
A_3	0.1667	0.5	

Partition d'entrée choisie

	z_i^-	z_i	z_i^+
B_1	-1	-0.75	0.4375
B_2	-0.875	0	0.875
B_3	-0.4375	0.75	1

Partition de sortie déterminée





Interpolation et règles graduelles

- Graphe imprécis mais net.
- Le choix d'autres implications résiduelles apporte de la gradualité dans le support de la relation binaire mais ne modifie en rien le noyau.

→ Famille de contraintes flexibles



Interpolation et règles graduelles

P1: If $A_i \subseteq A_i^*$, $i=1, \dots, n$, then $\Gamma^* \subseteq \Gamma$

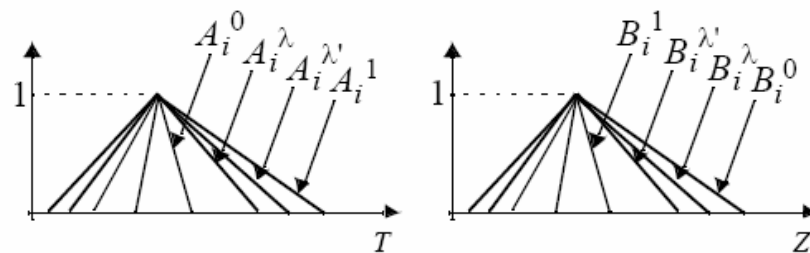
P2: If $B_i^* \subseteq B_i$, $i=1, \dots, n$, then $\Gamma^* \subseteq \Gamma$

P3: If $A_i \subseteq A_i^*$ and $B_i^* \subseteq B_i$, $i=1, \dots, n$, then $\Gamma^* \subseteq \Gamma$

Si $\{A_i^\lambda, \lambda \in [0,1]\}$ famille d'ensembles flous imbriqués sur T : $A_i^{\lambda'} \subseteq A_i^\lambda$ si $\lambda \geq \lambda'$

$\{B_i^\lambda, \lambda \in [0,1]\}$ famille d'ensembles flous imbriqués sur Z : $B_i^\lambda \subseteq B_i^{\lambda'}$ si $\lambda \geq \lambda'$

alors la famille de graphes associés aux règles $A_i^\lambda \rightarrow B_i^\lambda$, $\lambda \in [0,1]$ est telle que $\Gamma^\lambda \subseteq \Gamma^{\lambda'}$ si $\lambda \geq \lambda'$



$$\Gamma^1 \subseteq \Gamma^\lambda \subseteq \Gamma^{\lambda'} \subseteq \Gamma^0$$

P4: Si Γ^0 et Γ^1 sont de forme quadrilatère par morceaux, Γ^λ l'est également



Interpolation et règles graduelles

Construction d'un graphe flou

⇒ Construction automatique des ensembles flous imbriqués

$$A_i^\lambda = (1-\lambda)A_i^0 \oplus \lambda A_i^1, \lambda \in [0,1], i=1, \dots, n, \text{ avec } A_i^0 \subseteq A_i^1$$

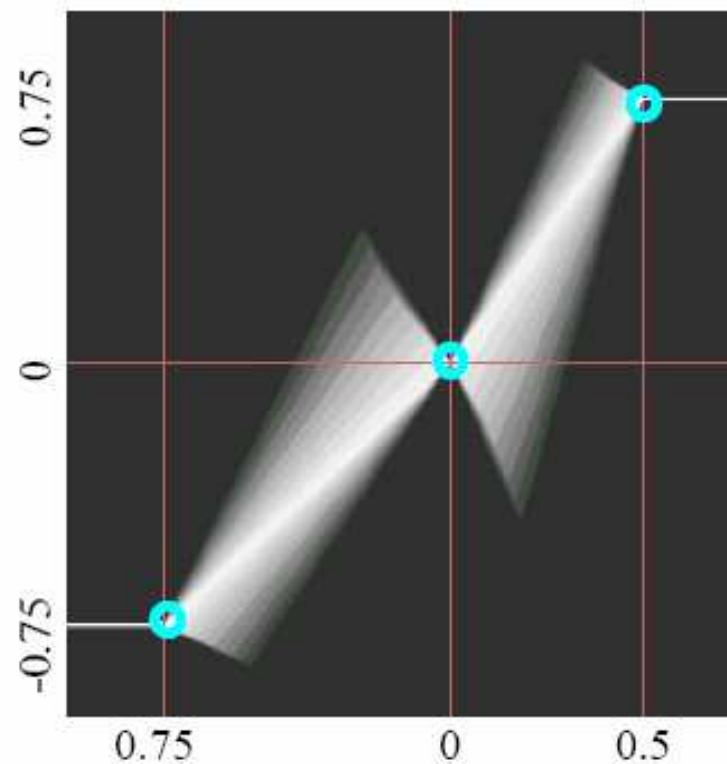
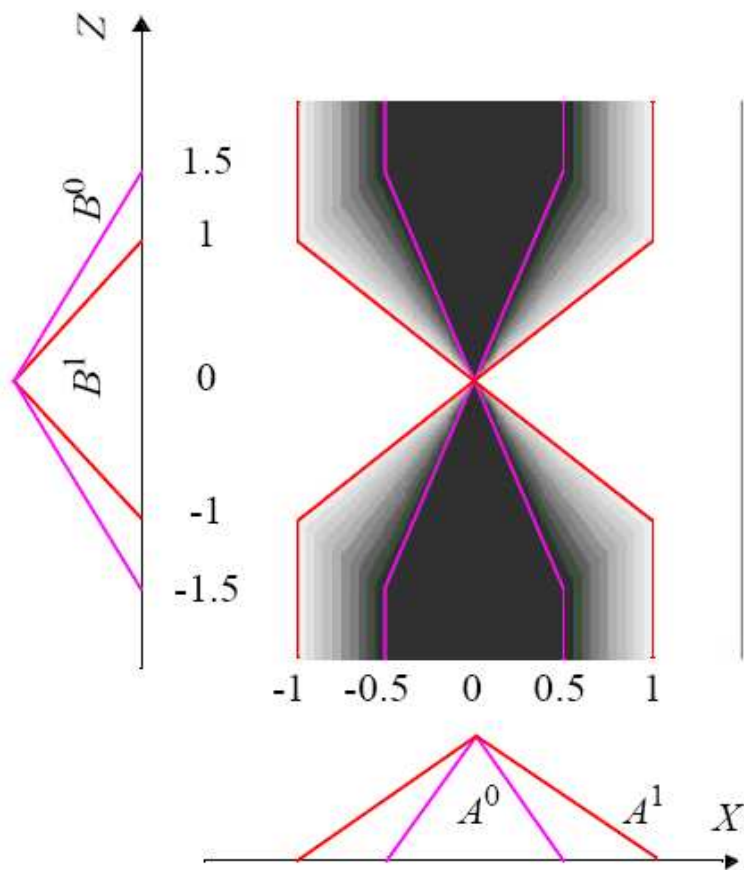
$$B_i^\lambda = (1-\lambda)B_i^0 \oplus \lambda B_i^1, \lambda \in [0,1], i=1, \dots, n, \text{ avec } B_i^1 \subseteq B_i^0$$

⇒ Théorème de représentation

$$\mu_F(x, z) = \sup_{\lambda \in [0,1]} \min(\lambda, \Gamma^\lambda(x, z))$$



Interpolation et règles graduées





Plan

- Introduction
- Systèmes flous à base de règles
- Systèmes flous arithmétiques
 - Systèmes linéaires régressifs flous
 - Arithmétique floue
- Conclusion / perspectives



Systemes flous arithmétiques

- D'un point de vue mathématique, un **modèle régressif linéaire** prend la forme d'une fonction linéaire des entrées considérées.
- Lorsque les coefficients de ce modèle sont des **nombre flous**, la sortie devient elle-même un nombre flou.
- Son calcul nécessite d'utiliser l'**arithmétique floue** construite selon le principe d'extension de Zadeh.
- L'arithmétique floue étend l'**arithmétique d'intervalles**. A ce titre, elle présente les mêmes problèmes, notamment le **manque d'inverses**.
- Lorsque l'hypothèse de non-interaction des variables manipulées est violée, les résultats fournis sont plus imprécis que nécessaire.



Systemes flous arithmetiques

Notation a intervalle conventionnel

Espace des bornes : $a = [a^-, a^+]$

Espace Midpoint / Radius : $a = (M_a, R_a)$ avec

$$M(a) = M_a = (a^- + a^+)/2$$

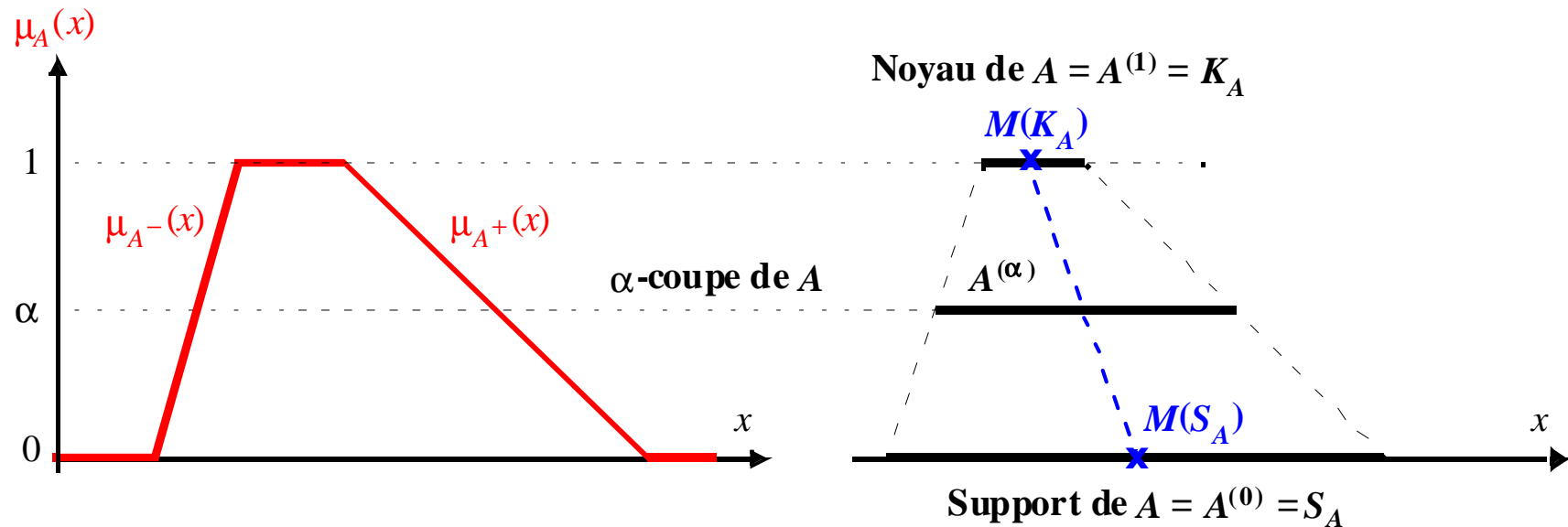
$$R(a) = R_a = (a^+ - a^-)/2$$

- Utilisation d'une représentation dans l'espace Mid / Rad



Systemes flous arithmetiques

Notation / representation des intervalles flous



Dans un contexte linéaire, l'intervalle flou A est défini par le couple (K_A, S_A)



Systemes flous arithmetiques

- Pouvoir **expressif limité** des systemes arithmetiques flous

Systeme flou $Y = A \odot x \oplus B$

Entree precise x , nombres flous A et B

$$R(S_Y) = R(S_B) + R(S_A) \cdot |x|$$

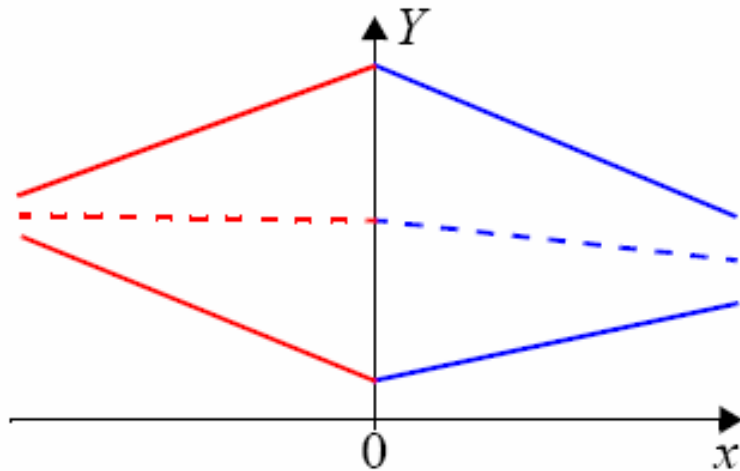
Si x est positif, $R(S_Y)$  par rapport à x

Si x est negatif, $R(S_Y)$  par rapport à x

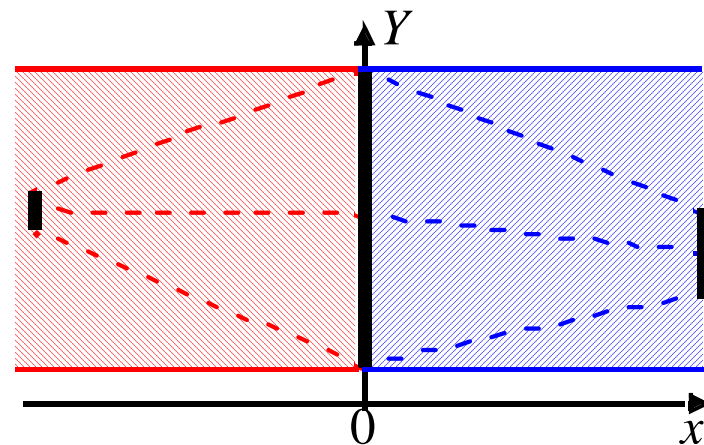


Systemes flous arithmetiques

- Pouvoir **expressif limité** des systemes arithmetiques flous



Sous-systemes non
représentables par un
modèle linéaire flou



Sous-systemes
linéaires flous
les moins « mauvais »

- Utilisation d'un **modèle décalé**

$$Y = A \odot (x - dec) \oplus B$$



Systemes flous arithmètiques

Identification des modèles régressifs flous à partir de données

■ Approche dite des moindres carrés flous

- Minimisation d'une distance entre intervalles flous
- Condition de cohésion des données

■ Approche dite possibiliste

- Optimisation de l'imprécision du modèle
- Relation contrainte entre le sortie du modèle et les observations

■ Problème maximal

$$Y_{\text{mod}} \subseteq Y_{\text{obs}}$$

■ Problème conjonctif

$$Y_{\text{mod}} \cap Y_{\text{obs}} \neq \emptyset$$

■ Problème minimal

$$Y_{\text{obs}} \subseteq Y_{\text{mod}}$$



Systemes flous arithmétiques

Identification des modèles régressifs flous à partir de données

■ Approche dite possibiliste

- Problème minimal $Y_{obs} \subseteq Y_{mod}$ avec Y_{obs} nombre triangulaire
- Modèle décalé
- Programmation linéaire
 - min Critère
 - ↳ Imprécision du modèle
- Recherche d'une inclusion totale (à tout niveau de coupe α)
 - Utilisation de paramètres trapézoïdaux
 - Contraintes d'inclusion aux niveaux $\alpha=0$ et $\alpha=1$



Systemes flous arithmétiques

Identification de modèles polynomiaux d'ordre N

$$Y = A_0 \oplus \sum_{i=1}^N A_i \odot (x^i - shift^i)$$

- Changement de variable $\tilde{x}_i = x^i - shift^i$: modèle multi-entrées

$$Y = A_0 \oplus \sum_{i=1}^N A_i \odot \tilde{x}_i$$

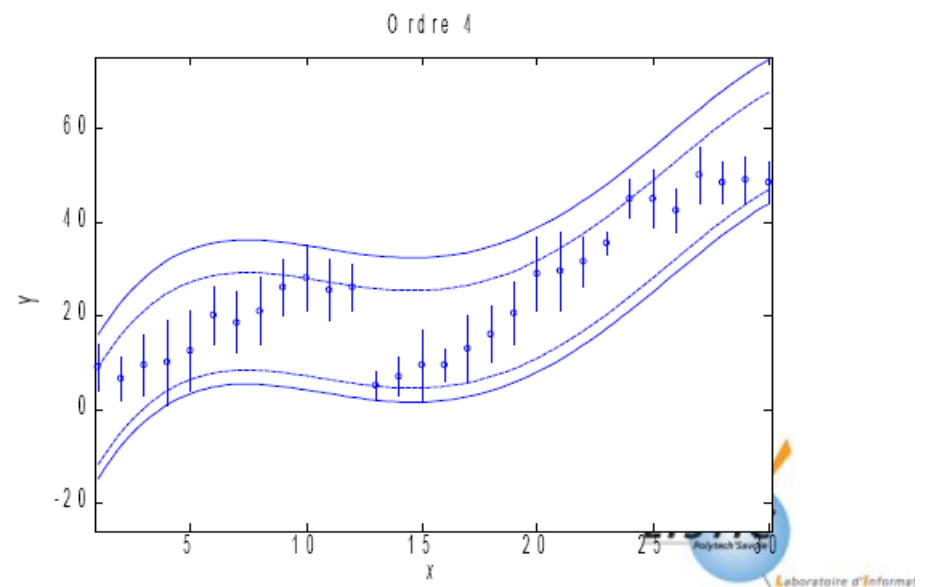
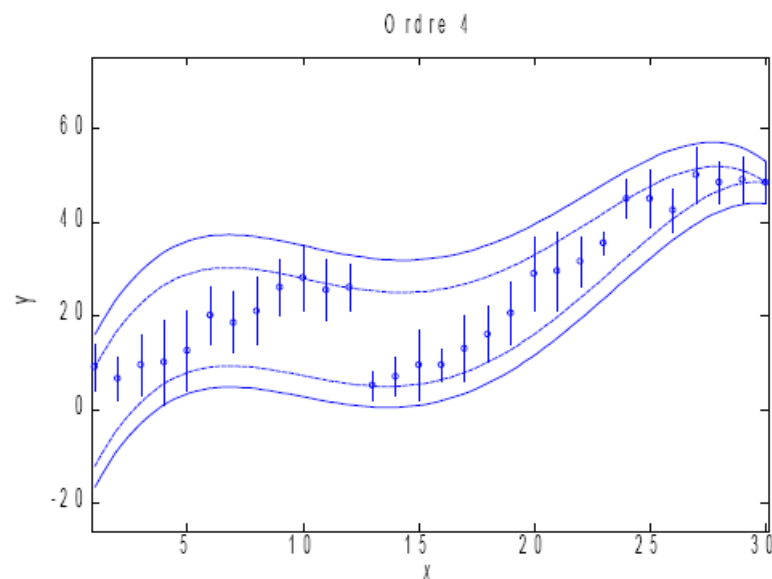
- Identification des paramètres à l'aide de la méthode proposée

Modèle linéaire en les paramètres



Systemes flous arithmètiques

	Modèle pour $shift = 30$	Modèle pour $shift = 1$
A_0	(48.5, [44, 53])	([-11.817, 9], [-14.816, 16])
A_1	12.04	10.179
A_2	1.5237	-1.1888
A_3	0.07271	0.05228
A_4	([-0.00111, -0.00109], [-0.00112, -0.00109])	-0.00071
J_{volume}	15.666	25.817
$Distance$	20.548	23.637





Plan

- Introduction
 - Systèmes flous imprécis ?
- Systèmes flous à base de règles
 - Approches Mamdani et Sugeno
 - Règles conjonctives / Règles graduelles
- Systèmes flous arithmétiques
 - Systèmes linéaires régressifs flous
 - Arithmétique floue
- Conclusion / perspectives



Conclusion

- Les règles graduelles, tout comme les systèmes flous arithmétiques permettent de générer des relations floues imprécises normalisées.
- Mais ...
 - Règles graduelles peu interprétables par un expert
 - Synthèse à partir de données délicate
 - Difficultés liées à l'utilisation de l'arithmétique floue
 - Liens entre règles graduelles et problème régressif minimal ?
- et surtout comment exploiter les graphes imprécis avec des entrées imprécises ?
- Sémantique associée aux systèmes imprécis ? aux données imprécises ?



Perspectives

Règles **et** arithmétique floue

Computational mechanism

		Interpolation Sugeno	Reasoning Mamdani	
Nature of C_k	a crisp number	Case a	Case d	Numerical domain
	a fuzzy number	Case b	Case e	
	a word	Case c	Case f	Symbolic domain

Legend:

- Usual implementations (Green)
- Computing with words (Orange)
- Fuzzy arithmetic (Yellow)